Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

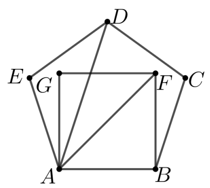
ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

26. siječnja 2024.

1. Neka je x najveći zajednički djelitelj brojeva 2^{2023} i 2^{2024}, a y njihov najmanji zajednički višekratnik. Izračunajte $3y - x - 2 \cdot \dfrac{x^2}{y}$ i rezultat zapišite u obliku potencije s bazom 2.

2. Na slici su prikazani pravilni peterokut $ABCDE$ i kvadrat $ABFG$. Odredite mjeru kuta FAD.



3. Tea je dobivenu novčanu nagradu odlučila podijeliti na četiri dijela. Jedan je dio namijenila za kupnju novog mobitela, drugi dio za obnovu odjeće, treći za ljetovanje, a četvrti za kupnju poklona prijateljici. Iznos predviđen za kupnju novog mobitela jednak je 26% ukupne novčane nagrade. Nadalje, dio namijenjen kupnji mobitela iznosi 80% dijela koji je Tea namijenila za obnovu odjeće, a jednak je i 65% dijela koji je namijenila za ljetovanje. Koliki postotak dobivene novčane nagrade Tea planira izdvojiti za kupnju poklona prijateljici?

4. Odredite najmanji prirodni broj n za koji je broj $2565 \cdot n$ kvadrat nekog prirodnog broja.

5. Za vrijeme Francuske revolucije postojala je ideja da se dan (period od 24 sata) podijeli na 10 sati, sat na 100 minuta. Iako ova ideja nije zaživjela, u Markovoj školi ponekad koriste takav „decimalni sat“. Kad je Marko počeo rješavati zadatak na „decimalnom satu“ su bila točno 4.5 sata. Kad je završio zadatak „obični sat“ je pokazivao točno 11 h 15 min. Petra je isti zadatak započela rješavati točno u podne po „običnom vremenu“, a završila u 5.2 sati po „decimalnom“. Tko je od njih dvoje brže riješio zadatak i za koliko brže po „običnom vremenu“? (Napomena: vrijeme se kod oba sata mjeri od ponoći.)

* * *

6. Zbroj razlomaka $\frac{12}{23} + \frac{1212}{2323} + \frac{121212}{232323} + \cdots + \frac{1212\ldots12}{2323\ldots23}$ iznosi 528. Broj znamenaka 1 i 2 u brojniku te broj znamenaka 2 i 3 u nazivniku tih razlomaka povećava se za jedan. Koliko puta se znamenka 2 pojavljuje u zadnjem razlomku?

7. U pravokutnom trokutu ABC pravi je kut u vrhu C, $|AB| = 8$ i $\sphericalangle ABC = 60°$. Trokut ABC se rotacijom oko vrha C za $30°$ u smjeru suprotnom kretanju kazaljke sata preslika u trokut $A'B'C$. Koliko iznosi površina zajedničkog dijela trokuta ABC i $A'B'C$?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

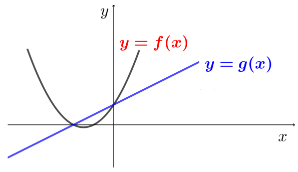
ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

26. siječnja 2024.

1. Odredite vrijednost izraza $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$ ako su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe $2x^2+3=6x$.

2. Grafovi funkcija $f(x)=ax^2+\frac{3}{2}x+c$ i $g(x)=\frac{c}{4}x+2$ prikazani su na slici. Točke u kojima se grafovi sijeku nalaze se na koordinatnim osima. Odredite realne brojeve a i c.



3. Riješite jednadžbu

$$\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}=2024.$$

4. Na nekom natjecanju iz matematike rješava se n zadataka, $10<n<20$. Za svaki točno riješeni zadatak natjecatelj dobiva 5 bodova, a za svaki neriješeni ili netočno riješen zadatak gubi 3 boda. Ako je Sebastijan imao ukupno 0 bodova, koliko je zadataka riješio točno? Koliko je bilo ukupno zadataka?

5. Ana ide u posjet baki i želi joj odnijeti nekoliko komada voća u košarici. Na raspolaganju ima 6 banana, 5 jabuka i 4 breskve.

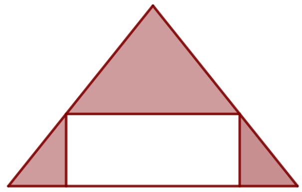
a) Na koliko načina može odabrati voće za košaricu ako košarica ne smije biti prazna?

b) Na koliko načina može odabrati voće za košaricu ako od svake vrste voća mora biti barem jedan komad?

(Napomena: nije važan raspored voća, već samo koje je voće u košarici i koliko komada toga voća.)

* * *

6. U jednakokračni trokut, duljine osnovice 16 cm i visine na osnovicu duljine 12 cm upisan je pravokutnik kojemu su dva vrha na osnovici, a preostala dva vrha na krakovima zadanog trokuta. Odredite duljine stranica upisanog pravokutnika tako da osjenčana površina bude minimalna. Koliko iznosi ta minimalna površina?



7. Neka je zadana funkcija $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt[3]{x^2+4x+4}+\sqrt[3]{x^2-4}+\sqrt[3]{x^2-4x+4}}.$$

Koliko je $f(4)+f(8)+f(12)+\cdots+f(2024)$?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

26. siječnja 2024.

1. Riješite jednadžbu $5 \cdot 0.16^x + 8 \cdot 0.4^x = 4$.

2. Neka su a i b pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $\dfrac{\log a}{3} = \dfrac{\log b}{2}$ i $\log(ab) = 5$. Koliko je $\sqrt[3]{a} + b^{\frac{1}{2}}$?

3. Zadana je funkcija $f(x) = A \sin\left(Bx + \dfrac{7\pi}{10}\right) + D$, pri čemu su A, B i D pozitivni realni brojevi. Točka $M\left(\dfrac{2\pi}{3},\ -8\right)$ je jedina točka minimuma, a točka $N\left(\dfrac{3\pi}{2},\ 12\right)$ jedina točka maksimuma funkcije f u intervalu $\left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$. Odredite $f\left(\dfrac{203\pi}{12}\right)$.

4. Odredite sve realne brojeve t za koje je jedno rješenje jednadžbe $x^2 + 2024 = tx$ prost broj, a drugo složen prirodni broj.

5. Prikazan je zapis pisanoga zbrajanja četiriju troznamenkastih brojeva sa znamenkama a i b. O kojim se troznamenkastim brojevima radi?

$$\begin{array}{cccc} & a & a & a \\ & a & a & b \\ & a & b & b \\ + & b & b & b \\ \hline 1 & 5 & 0 & 3 \end{array}$$

* * *

6. Paralelogram s dijagonalama duljina 20 cm i 30 cm koje se sijeku pod kutom mjere $60°$ baza je uspravne prizme obujma $1500\sqrt{3}$ cm^3. Koliko je oplošje te prizme?

7. Iz skupa $S = \{(x,\ y)\ :\ x, y \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant x \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant 5\}$ na slučajan se način bira uređeni par $(x,\ y)$. Kolika je vjerojatnost da za članove x i y toga uređenog para vrijedi $x + y > 2$ i $|x - y| < 2$?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

26. siječnja 2024.

1. Riješite jednadžbu

$$\frac{(n+2)!-(n+1)!-n!}{n!}=2024.$$

2. Odredite sve realne brojeve x za koje su brojevi $\log(\sin x)$, $\log(\sin x+1)$ i $\log(3\sin x+1)$, tim redom uzastopni članovi aritmetičkog niza.

3. Vrhovi četverokuta su točke u kompleksnoj ravnini pridružene rješenjima jednadžbe

$$(z^2+1)(z^2+z+1)=0$$

u skupu $\mathbb{C}$. Odredite koordinate vrhova i površinu danog četverokuta.

4. Odredite sve realne brojeve k za koje kružnice zadane jednadžbama $(x+1)^2+y^2=9$ i $(x-k)^2+(y-2k)^2=4$ imaju samo jednu zajedničku točku.

5. Profesor matematike dao je učenicima za domaću zadaću deset zadataka i rekao da će među njima odabrati dva zadataka za sljedeći test. Koliko najmanje zadataka Luka treba riješiti od zadanih deset da bi s vjerojatnošću većom od $\frac{7}{9}$ bio siguran da će se među odabranim zadacima pojaviti barem jedan zadatak od onih koje je riješio?

* * *

6. Neka je n prirodni broj. U razvoju binoma $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ omjer binomnih koeficijenata petog i šestog člana je $1:404$. Koliko članova u tomu razvoju sadrži potenciju broja x kojoj je eksponent prirodan broj?

7. Osnovka uspravne četverostrane piramide visine duljine h je pravokutnik sa stranicama duljina a i b. Duljina svih bočnih bridova iznosi $\frac{\sqrt{94}}{2}$ cm, a obujam piramide je 9 cm^3. Ako su brojevi a, b i h redom uzastopna tri člana rastućeg geometrijskog niza, odredite a i b.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.